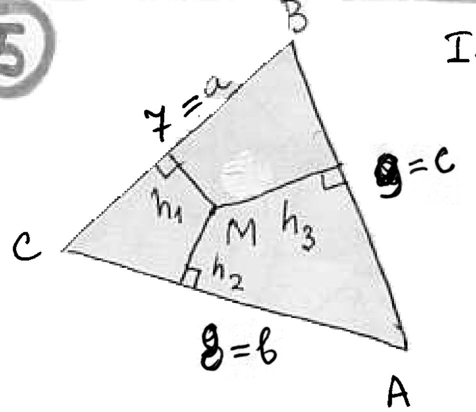
МГУ-2018 REP ВАРИАНТ 1. РЕШЕНИЯ

5



I. Найдем такую точку M, для которой $h_1+h_2+h_3=\min$. Имеем

стр 2

$$\begin{cases} ah_1+bh_2+ch_3=2S\\ h_1+h_2+h_3\to\min\\ 2S=ah_a=bh_b=ch_c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{2S}h_1+\frac{b}{2S}h_2+\frac{c}{2S}h_3=1\\ h_1+h_2+h_3\to\min\end{cases}$$

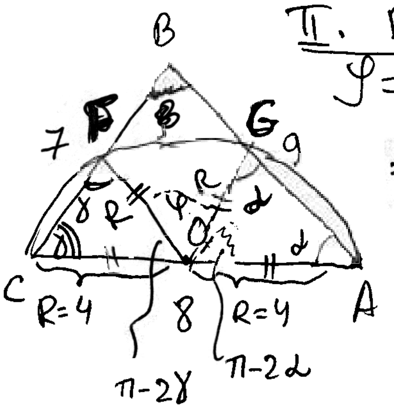
$\Rightarrow$ но $\frac{a}{2S}=\frac{1}{h_a}$, $\frac{b}{2S}=\frac{1}{h_b}$, $\frac{c}{2S}=\frac{1}{h_b}$, поэтому $\begin{cases}\frac{h_1}{h_a}+\frac{h_2}{h_b}+\frac{h_3}{h_c}=1\\ h_1+h_2+h_3\to\min\end{cases}$

Обозначим $\frac{h_1}{h_a}=p$, $\frac{h_2}{h_b}=q$; $\frac{h_3}{h_c}=t$, получим $\begin{cases}0\le p,q,t\le 1\\ p+q+t+1 \quad (*)\\ ph_a+qh_b+th_c\to\min\end{cases}$

$h_1=ph_a;\ h_2=qh_b,\ h_3=th_c$

Минимум выражения (*) достигается, если коэф-т при самой короткой высоте равен 1, а остальные – нулю. Но по условию

$a<b<c \Leftrightarrow h_a>h_b>h_c \Rightarrow t=1,\ p=q=0 \Rightarrow$ искомая точка $M=C$!. Аналогично вторая точка D совпадает с A (max)



II. Вычислим теперь длину дуги FG

$\varphi=\pi-(\pi-2\alpha)+(\pi-2\gamma)=2\alpha+2\gamma-\pi=2(\alpha+\gamma)-\pi=$

$=2(\pi-\beta)-\pi=\pi\ 2\beta$, Найдем угол β

$8^2=7^2+9^2-2\cdot7\cdot9\cdot\cos\beta\Rightarrow$

$\Rightarrow 64=49+81-126\cos\beta\Rightarrow 126\cos\beta=66$

$\cos\beta=\frac{66}{126}=\frac{11}{21}\Rightarrow\beta=\arccos\frac{11}{21}\Rightarrow L=R \quad =4\left(\pi-2\arccos\frac{11}{21}\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } 4\pi-8\arccos\frac{11}{21}}$