Сычугов А.Д., Сычугов Д.Ю.

Блок лекций:

Текстовые задачи: ЕГЭ и конкурсные экзамены в МГУ

Лекция 1. Стандартная «экономическая» задача ЕГЭ. Построение модели. Как упростить арифметические вычисления?

СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧА. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

1. **Условие задачи.** Клиент банка (заемщик) взял у банка кредит в S рублей по ставке p процентов в месяц. Условия кредита следующие: каждый последний день месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем заемщик переводит сумму X рублей в счет погашения долга (обычно постоянную, кроме, может быть, последней выплаты). Далее вопрос.

2. **Построение модели.** Прибавка долга на p процентов соответствует умножению долга на множитель k, который считается по формуле $k = (100+p)/100$.

1) К концу первого месяца долг D(1) будет составлять $D(1) = S \cdot k - X$

2) Далее, к концу 2-го месяца остаток долга умножается на k , и из полученной величины вычитается X, в результате получим:

$$D(2) = (S \cdot k - X) \cdot k - X = S \cdot k^2 - X \cdot (1 + k)$$

3) Аналогичная операция происходит и к концу 3-го месяца:

$$D(3) = D(2) \cdot k - X = S \cdot k^3 - X \cdot (1 + k + k^2)$$

4) Рассуждая по индукции, получаем формулу для остатка долга после n-го месяца, которую преобразуем с помощью формулы суммы геометрической прогрессии:

$$D(n) = S \cdot k^n - X \cdot (1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}) = S \cdot k^n - X \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \qquad (1)$$

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ И ПРИМЕРЫ

Условием завершения выплаты будет либо $D(n) = 0$ либо $D(n) < 0$. Поэтому условие завершения выплаты за n месяцев имеет вид:

$$Sk^n \le X\frac{k^n-1}{k-1} \Rightarrow S(k-1)/X \le \frac{k^n-1}{k^n} = 1-k^{-n} \Rightarrow k^{-n} \le 1-S(k-1)/X$$

$$k^n \ge \frac{1}{1-(k-1)\cdot S/X} \qquad (2)$$

Пример 1. 1 января 2015 года А.С. взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты следующая — 1 месяца каждого числа банк начисляет 1% на остающуюся сумму долга, затем А.С. переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев А. С. может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не больше 275 тыс. рублей?

Решение. Срок выплаты будут наименьшим, если каждый месяц платить макс. возможно. Подставим в (2) S=1.1, k=1.01, X=0.275:

$$1.01^n \ge \frac{1}{1-0.01\cdot 1.1/0.275} = \frac{1}{1-0.01\cdot 4} = \frac{100}{96} = \frac{25}{24} \qquad (3)$$

РАЗБОР ПРИМЕРА. КАК СОКРАТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ?

Теперь можно возводить 1.01 в квадрат, куб, и так далее до тех пор, пока не выполнится неравенство (3), но можно поступить проще. Заметим, что 1.1/0.275 = 4, что означает, что если бы процентов не было, то долг можно было бы выплатить за 4 месяца. Но проценты есть, и поэтому число месяцев, за которое можно расплатиться, не меньше 5. Проверим, выполняется ли неравенство (3) при *n=5* ?

$$1.01^5 = (1+0.01)^5 > 1+5\cdot 0.01 = 21/20 > 25/24$$

Ответ. За 5 месяцев.

Замечание 1. Неравенство, которое мы применили, называется неравенством Бернулли. Оно имеет вид: Если X>0 и n>1, то выполнено: $(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (4)$

Замечание 2. Если бы неравенство Бернулли не прошло, то это не означало бы, что за 5 месяцев рассчитаться нельзя.

Замечание 3. Давайте убедимся, что предложенный нами способ действительно приводит к экономии. Подсчитаем по месяцам начисления и долги.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «В ЛОБ»

Месяц	**Долг после начисления процентов**	**Долг после выплаты макс. платежа**
1	1100000 + 11000 = 1111000	1111000 - 275000 = 836000
2	836000 + 8360 = 844360	844360 - 275000 = 569360
3	569360 + 5693,6 = 575053,6	575053,6 - 275000 = 300053,6
4	300053,6 + 3000,54 = 303054,14	303054,14 - 275000 = 28054,14
5	28054,14 + 280,54 = 28334,68	28334,68 - 28334,68 = 0

Замечание 4. Задача решается за 5 циклов, и уже число вычислений чрезмерно. А если по условию циклов окажется больше? Рассмотрим еще один пример.

РАЗБОР ПРИМЕРА. КАК СОКРАТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2. (на дом) 1 января 2015 года Василий Михайлович взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты следующая — 1 месяца каждого числа банк начисляет 1% на остающуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Василий Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Василий Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не больше 137,5 тыс. руб.?

Подсказка: 1100000/137500=11000/1375=11*200/275=11*40/55=40/5=8, то есть, если бы не было процентов, В.М расплатился бы за 8 месяцев.

(Ответ. За 9 месяцев. Здесь также проходит неравенство Бернулли.)

Доказательство неравенства Бернулли. $(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (4)$

проводится методом математической индукции по *n*. При *n* = 1 неравенство, очевидно, верно. Допустим, что оно верно для некоторого *n*, докажем его верность для *n* + 1:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx) = 1+nx+x+1 > 1+nx+x = 1+(n+1)\cdot x$$

что и требовалось доказать.

ДРУГИЕ СПОСОБЫ СОКРАТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Как еще сократить вычисления. Неравенство (2) универсально для подобных задач, однако разрешить его, вычисляя операции умножения «в столбик», не всегда просто. Какие еще есть приемы, если неравенство Бернулли не проходит?

Пример 3. Степан хочет взять в кредит 1,2 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последнего платежа) после начисления процентов. Процентная ставка составляет 10% годовых. На какое минимальное число лет Степан может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были бы не более 290 тыс. руб.?

Решение. Для данной задачи $S = 1.2$, $X = 0.29$, $k = 1.1$ и неравенство (2) принимает вид:

$$1{,}1^n \geq \frac{0{,}29}{0{,}29 - 1{,}2 \cdot 0{,}1} = \frac{29}{17} \approx 1{,}7058\ldots$$

Нетрудно убедиться, что при n = 5,6,7 неравенство Бернулли не помогает решить задачу, однако (как мы сейчас убедимся), ее решение n = 6. Чтобы показать это, применим первый способ – решение «в лоб»:

ДРУГИЕ СПОСОБЫ СОКРАТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Месяц	**Долг после начисления процентов**	**Долг после выплаты макс. платежа**
1	1200000 + 120000 = 1320000	1320000 - 290000 = 1030000
2	1030000 + 103000 = 1133000	1133000 - 290000 = 843000
3	843000 + 84300 = 927300	927300 - 290000 = 637300
4	637300 + 63730 = 701030	701030 - 290000 = 411030
5	411030 + 41103 = 452133	452133 - 290000 = 162133
6	162133 + 16213,3 = 178346,3	178346,3 - 178346,3 =0

Замечание. Задача решилась “в лоб” относительно просто только потому, что число процентов равно 10%. Если бы число процентов было бы, например, 12, то вычисления были бы неприятнее.

Каким ещё способом можно упростить вычисления? Обратимся к формуле бинома Ньютона. Как известно,

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \mathrm{K} + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

где $$C_n^k = \frac{(n)!}{(k!)(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \mathrm{K} \cdot (n-(k-1))}{(k!)} = C_n^{n-k} \qquad (5)$$

ДРУГИЕ СПОСОБЫ СОКРАТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Из формулы Ньютона (5) для *n* = 2,3,4,5,6 получаем:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Применим теперь второй способ решения задачи.

1) **Если бы процентов не было, то, поскольку 1.2 / 0.29 > 4, то всё равно расплатиться за 4 месяца и менее не получится.**
2) **Проверим, удастся ли Степану расплатиться за *n* = 5 месяцев:**

$$(1+0.1)^5 = 1 + 5\cdot 0.1 + 10\cdot 0.01 + 10\cdot 0.001 + 5\cdot 0.0001 + 1\cdot 0.00001 = 1.61051 < 1.7058\ldots$$

3) **Проверим *n* = 6, причём из формулы возьмём только три члена:**

$$(1+0.1)^6 > 1 + 6\cdot 0.1 + 15\cdot 0.01 = 1.75 > 1.7058\ldots$$

Ответ: за 6 месяцев.

СОКРАЩЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧИ

Замечание. Проверяя $n = 6$, мы, по существу, применили обобщённое неравенство Бернулли: $(1+x)^n > 1 + nx + 0.5 \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^2$

Как ещё сокращать вычисления. Если число процентов не кратно 10, то может помочь перевод десятичных дробей в обыкновенные.

Пример 4. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке кредит 4,290,000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на остающуюся сумму долга, затем Дмитрий переводит в банк платёж рублей. Какой должна быть сумма платежа чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами?

Решение. Имеем $S = 4\,290\,000$, $k = 1.145 = 229/200$, $n = 2$. Так как весь кредит был погашен за два цикла, то $D(2)=0$, и мы получаем:

$$x = \frac{k^2 S}{(1+k)} = \frac{4290000 \cdot 229^2}{200 \cdot (229+200)} = 50 \cdot 229^2 = 50 \cdot 52441 = 2622050$$

Ответ. Сумма платежа должна быть равна 2622050 руб.

ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Возможны другие варианты постановки задачи, например, определение процентной ставки.

Пример 5. **31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн. руб. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 550 тыс. руб., во второй раз 638,4 тыс. руб. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?**

Решение. **Имеем $S = 1$, k – неизвестное, первая выплата $X = 0.55$, вторая выплата $Y = 0.6384$. Поскольку выплаты были неравными, то нам надо немного изменить стандартную модель:**

$D(1)=kS-X$; $D(2)= k(kS-X)-Y=k^2S-kX-Y=0$. Получаем квадратное уравнение $k^2-0.55k-0.6384=0$, откуда получаем $k=1.12$.

Ответ: **12 процентов.**

Пример 6 (на дом). **31 декабря 2014 года Антон взял в банке 1 млн. руб. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Антон переводит очередной транш. Антон выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 510 тыс. руб., во второй раз 649 тыс. руб. Под какой процент банк выдал кредит Антону?**

ПОХОЖИЕ ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ МГУ

Эконом. ф-т. МГУ, 1995г. **В банк помещён вклад в размере 2300 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырёх лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 1025%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?**

Решение. **Пусть** $R = 1025$ **— суммарный процентный прирост вклада за всё время хранения. Через год сумма вклада составит (после начисления процентов, до внесения вклада)** Sk**, через два года** $(Sk + x) \cdot k = Sk^2 + xk$ **, через три** $Sk^3 + xk^2 + xk$ **, через *n* лет** $Sk^n + xk^{n-1} + xk^{n-2} + \ldots + xk = Sk^n + xk\dfrac{k^{n-1} - 1}{k - 1}$

Таким образом, получаем уравнение для величины x: $Sk^n + xk\dfrac{k^{n-1} - 1}{k - 1} = S\left(1 + \dfrac{R}{100}\right)$

Подставляем в него заданные значения, получаем

Ответ: **690 тыс. руб.**

Эконом. ф-т. МГУ, 1995г. (на дом) **В банк помещён вклад в размере 2100 тыс. руб. под 100% годовых. В конце каждого из первых шести лет хранения после начисления процентов вкладчик снимал со счёта одну и ту же фиксированную сумму. К концу седьмого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада уменьшился по сравнению с первоначальным на 20%. Какую сумму вкладчик ежегодно снимал со счёта?**

Ответ: **2120 тыс. руб.**

ЗАДАЧА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Ф-т. ВМиК МГУ, 1994г. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого вещества, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы такого же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 30-й инъекции?