Сычугов А.Д., Сычугов Д.Ю.

Блок лекций:

Задачи с целыми числами: ЕГЭ и конкурсные экзамены в МГУ

Лекция 2. Диофантовы уравнения.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными называется уравнение $ax + by = c$ (1), где a, b, c, x, y – целые, x, y – неизвестные. Решением (1) называется любая пара целых чисел x, y, при которых оно обращается в верное равенство.

Теорема. Уравнение (1) (в зависимости от a, b, c) либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

1. Метод решения - анализ остатков от деления.

Пример 1. Решить уравнение в целых числах $3x + 2y = 7$.

Решение. Число 7 – нечетное, число $2y$ – четное, значит $3x$, и также x нечётное. Подставим $x = 2k + 1$ в исходное уравнение:

$3(2k + 1) + 2y = 7$, или $3k + y = 2$, откуда следует $y = 2 – 3k$.

Ответ: $x = 2k + 1$, $y = 2 – 3k$, где k – произвольное целое число.

Пример 2. Решить уравнение в целых числах $5x - 3y = 2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $5x – 2 = 3y$. Так как $3y$ делится на 3, то и $5x – 2$ делится на 3. Рассмотрим остатки от деления x на 3:

1) Если $x = 3k$, то получаем $15k – 2 = 3y$, нет решений; 2) Если $x = 3k + 1$, то получаем $15k + 3 = 3y$, или $y = 5k + 1$ 3) Если $x = 3k + 2$, то нет решений (сами). **Ответ:** $x = 3k + 1$, $y = 5k + 1$, k – любое целое.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример 3. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить вклад поровну оказалось, что остаётся 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты стали снова поровну делить клад, то лишними остались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли ещё три пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остаётся 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет?

Решение. Запишем условие задачи в виде системы (1):

$$\begin{cases} S = 13a + 8 \\ S = 11b + 3 \\ S = 8c + 5 \\ S \le 500 \\ a, b, c, S \in N \end{cases} \qquad (1)$$

S можно исключить. Подставим в неравенство выражение для S из первого уравнения и разрешим его относительно a. Вычтем из второго уравнения первое и разрешим его относительно a. Из второго же уравнения вычтем третье (2). Начнём решать (1) со второго уравнения.11b-8c=2, 8b+3b-8c=2, 8c-8b=3b-2, 8h=3b-2 (обозначили h=c-b)

$$\begin{cases} a = (11b - 5)/13 \\ 11b - 8c = 2 \\ a \le 37 \\ a, b, c \in N \end{cases} \qquad (2)$$

Можно подобрать решение h=2, b=6, c=8. Далее мы подставляем это в выражение для a и убеждаемся, что оно не целое. Это решение нам не подходит. Воспользуемся теоремой для диофантовых уравнений: все решения уравнения mx+ny=k (3) (m,n взаимно простые) описываются формулами (4), где (x_1, y_1) — какое-либо решение уравнения (3). b это x, c это y, m=11, n=-8, (6,8) — решение.

$$\begin{cases} x = x_1 + nt, \\ y = y_1 - mt, \quad (4) \\ t \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$$

Отсюда a=(11(6-8t)-5)/13, a=(61-88t)/13. Из a ≤ 37 получаем 61-88t ≤ 481

-4 ≤ t ≤ 0, поскольку a-натуральное. Нам подходит только значение t=-3, при котором получаем a=25, b=30, c=41, S=333.
Проверяем: 13·25+8=333, 30·11+3=333, 41·8+5=333.

Ответ: 333 золотые монеты.

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Пример 4. Ученик должен был умножить двузначное число на трёхзначное и разделить произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял написанные рядом двузначное и трёхзначное число за одно пятизначное. Поэтому полученное частное оказалось в два раза больше истинного (натурального). Найти все три числа.

Решение. Пусть X — двузначное, Y — трехзначное, Z — пятизначное. Запишем остальные условия в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{1000X+Y}{Z}=2m \\ \dfrac{X\cdot Y}{Z}=m \\ X, Y, Z, m \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Делим одно уравнение на другое: (1000X+Y)/XY=2 $\Leftrightarrow$
1000X+Y=2XY, Y(2X-1)=100X, 2X–1 > 0 и нечётное.

$$Y=\frac{1000X}{2X-1}=\frac{1000X-500}{2X-1}+\frac{500}{2X-1}=500+\frac{500}{2X-1}$$

Выпишем делители 500: 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500. Первые 5 отпадают, потому что X двузначное. Все остальные чётные также отпадают, потому что 2X-1 — нечётное.

Остаются варианты 2X-1=25, X=13, Y=520 и 2X-1=125, X=63, Y=504.

Проверим их: 1) X=13, Y=520, XY=6760, получили четырёхзначное число, а нам надо делить его на пятизначное Z. Не подходит.

2) X = 63,Y = 504, XY = 31752. У 31752 есть три пятизначных делителя: 31752 / 1 = 31752, 31752 / 2 = 15876 и 31752 / 3 = 10584.
При этом 1000X+Y = 63504 делится на все три числа:
63504 / 31752 = 2, 63504 / 15876 = 4, 63504 / 10584 = 6. Сравним:
31752 / 31752 = 1, 31752 / 15876 = 2, 31752 / 10584 = 3. То есть все три делителя подходят для Z, задача не имеет однозначного решения.
Ответ: X = 63, Y = 520, Z = 10584, 15876 или 31752.

Пример 5. На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел.
Среднее арифметическое этих чисел равно -3,
среднее арифметическое всех положительных равно 5,
среднее арифметическое всех отрицательных равно -10.

а) Сколько чисел написано на доске

б) Каких чисел больше, положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее возможное количество положительных чисел среди них?

Решение. а) Пусть a_1, a_2 , …, a_m — положительные, b_1 , b_2, …, b_n — отрицательные числа, m>0, n>0, $k \geq 0$ число нулей, 50 < m +n + k < 60,

m, n, k – целые. Запишем в этих обозначениях средние арифметические.

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}=5 \qquad \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}=-10 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} a_1+a_2+\ldots+a_m=5m=S_+ \\ b_1+b_2+\ldots+b_n=-10n=S_- \end{matrix}$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m+b_1+b_2+\ldots+b_n}{m+n+k}=-3 \quad\Rightarrow\quad 10n-5m=3(m+n+k)$$

Отсюда m+n+k делится на 5. Из 50 < m+n+k < 60 получаем m+n+k=55.

б) 10n-5m=165, 2n-m=33, $\begin{cases} m+n=55-k \\ 2n-m=33 \end{cases}$ **x2** $\begin{cases} 2m+2n=110-2k \\ 2n-m=33 \end{cases}$ **+, -**

3n=88–k, 3m=77-2k, 3n>3m, n>m

в) $\begin{cases} n=(88-k)/3 \\ m=(77-2k)/3 \\ m>0,\ n>0,\ k\ge 0,\quad m,n,k\in \mathbf{Z} \\ m\to\max \quad\Rightarrow\quad k\to\min \end{cases} \Rightarrow$ **k = 0 не подходит, k = 1 подходит (m = 25)**

Ответ: а) 55 чисел б) отрицательн. больше в) max 25 положительн.

Пример 6. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 4000. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна n% от длины другой стороны, где n — также натуральное число.

а) каково наибольшее значение площади прямоугольника?

б) каково наименьшее значение площади прямоугольника?

в) найти все возможные значения площади при условии n < 100

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Решение. а) Запишем в виде системы:

$$\begin{cases} x, y, n \in \boldsymbol{N} \\ y = nx/100 \\ x + y = 2000 \ \Leftarrow\ 2\cdot(x+y) = 4000 \end{cases}$$

S(x)=x(2000-x), квадратичная функция, ветви параболы вниз, вычисляем производную, получаем x=1000 и max(S(x))=1000000

б) минимум (на ОДЗ) будет при x=1 или x=1999, S(1)=S(1999)=1999

в) y = nx/100, 100y=nx, y=2000–x, 100(2000-x)=nx, 200000=x(n+100), n+100=200000/x Известно, что 0<n<100, поэтому 100<n+100<200 и n+100 — целое. $200000 = 2^6 5^5$ **Необходимо найти делители** $d_i = n + 100$ **числа 200000 между 100 и 200. Будем их составлять. Пишем табличку:**

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	

$100 < d_i = 1\cdot 2^a \cdot 5^b < 200 \quad 0 \le a \le 6 \quad 0 \le b \le 5$

Если мы берём 2^0**, то d=125, n=25, x=1600, y=2000-x=400, S=xy=640000**

Если мы берём 2^1**, то 50 мало, 250 много.**

Если мы берём 2^2**, то 100 мало, 500 много.**

Если мы берём 2^3**, то 40 мало, 200 много.**

Если мы берём 2^4**, то 80 мало, 400 много.**

Если мы берём 2^5**, то d=160, n=60, x=1250, y=2000-x=750, S=xy= 937500**

Если мы берём 2^6**, то 64 мало, 320 много.**

Ответ: площади: а) 1000000 макс. б) 1999 мин. в) 640000 и 937500.