б) Вычисление определителей 3×3

стр 3.

Матрица (3×3) – это таблица вида:

$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, определитель M обозначается символом $\det M$ и равен

$$\det M = a_1 \cdot \det\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2) \quad (6)$$

Пример 3.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot (3\cdot5 - 2\cdot1) - 4(2\cdot5 - 1\cdot1) + 2(2\cdot2 - 3\cdot1) =$$

$$= 1\cdot13 - 4\cdot8 + 2\cdot1 = -17.$$

Геометр. смысл определителя 3×3: объем параллепипеда, слениками ребрами которого явл. векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

в) Вычисление векторного произведения

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) = \vec{i} \cdot a_1 + \vec{j} \cdot a_2 + \vec{k} \cdot a_3$

$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) = \vec{i}\, b_1 + \vec{j}\, b_2 + \vec{k} \cdot a_3$

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат в одной пл-ти, то $\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0$

Определение

Векторное произведение $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ – вектор, направленный перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и численно равный площади параллелограма, сторонами которого являются $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $[\vec{a} \times \vec{b}] = 0$. При этом вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая

Для вычисления векторного произведения справедлива формула (без док-ва):

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{i} \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \vec{j} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \vec{k} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - b_1a_3) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (7)$$

То есть вычисление векторного произведения ведется как определитель третьего порядка, только в первой строке матрицы векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.