Блок лекций:

Задачи, основанные на теории чисел: ЕГЭ и конкурсные экзамены в МГУ

Лекция 21-1. Введение в натуральные числа. Системы счисления. Признаки делимости. Задачи на свойства системы счисления и признаки делимости.

ТЕОРИЯ. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. Натуральные числа. Числа 1, 2, 3,…, 2015,... называются **натуральными.** Множество натуральных чисел *N* замкнуто относительно операций сложения и умножения. Это значит, что если сложить (перемножить) два любых натуральных числа, то результатом будет натуральное число. Операции вычитания и деления могут вывести за пределы *N*.

2. Системы счисления. В десятичной системе счисления натуральное число представляется в виде

$$n = \overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

где все цифры от 0 до 9, причем $a_k \neq 0.$

3. Признаки делимости (на 2, 5, 4, 8, 3, 9 проходят в школе)

Признак делимости на 11. Натуральное число *n* делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 знакопеременная сумма его цифр $M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$. Например, число 239184 делится на 11, так как 2-3+9-1+8-4=11, а число 1235 – нет, так как 1-2+3-5=-3.

Пример 1. Найти наибольшее натуральное шестизначное число, такое, что оно делится на 132, а сумма его цифр равна 21.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРИЗНАКОВ ДЕЛИМОСТИ

Пример 2. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код – семизначное число из двоек и троек. Известно, что в кодовом числе двоек больше, чем троек. Далее, известно, что кодовое число делится на 3 и на 4. Найдите код сейфа.

Решение. 1) Если число N делится на 4, то число, составленное из двух его последних цифр делится на 4. Получается 32.

2) Подсчитаем теперь, сколько в числе N двоек и троек (двоек больше, есть по крайней мере по одной двойке и тройке). Возможны варианты: 6, 5, или 4 двойки. В первом случае сумма цифр числа N равна 15, подходит; во втором случае 16 и в третьем 17 – не подходят.

Ответ: 2222232.

Пример 3 (на дом). К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре, чтобы полученное число делилось на 72.

Пример 4 (на дом). Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРИЗНАКОВ ДЕЛИМОСТИ

Пример 5. а) Приведите пример числа-палиндрома, делящегося на 55.
б) Сколько пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 55?
в) Найти 13-е по величине число-палиндром, делящееся на 55.
(числа-палиндромы – это числа вида 121, 1221, 343, 23432, 7534357…)

Решение. а) 55 (подойдёт и любое другое число, найденное ниже);

б) Если число делится на 55, то оно делится одновременно на 5 и 11. На 0 число заканчиваться не может, поэтому первая и последняя цифры 5 – число n=5XZX5, тогда M = 5-X+Z-X+5=10-2X+Z должно делиться на 11. Годятся 10 чисел: 50105, 51315, 52525, 53735, 54945, 55055, 56265, 57475, 58685, 59895.

в) Среди двузначных чисел подходит только одно — это 55.
Среди трёхзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет, M = 5-X+5 не делится на 11. Для четырёхзначных чисел для любой X M = 5-X+X-5=0 и годятся 10 чисел: 5005, 5115, 5225, 5335, 5445, 5555, 5665, 5775, 5885, 5995.

Ответ: а) 55; б) 10; в) 51315.

Пример 6 (на дом). а) Приведите пример числа-палиндрома, делящегося на 15.

б) Сколько пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

в) Найдите 37-е по величине число-палиндром, делящееся на 15.

ЗАДАЧИ НА СВОЙСТВА ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

Пример 7. **Расшифровать равенство $\overline{MM} + \overline{NKN} = \overline{PQQP}$, где буквами *M,N,K,P,Q* обозначены неизвестные цифры в десятичной записи чисел.**

Решение. **Поскольку первое слагаемое двузначное число, а второе - трехзначное, а сумма - четырехзначное, то равенство может быть лишь при *N* = 9, *P* = 1, *Q* = 0. Частично расшифрованное равенство примет вид $\overline{MM} + \overline{9K9} = 1001$. Отсюда следует *M* = 2 (так как только цифра 2 при сложении с цифрой 9 дает в младшем разряде единицу). Остается лишь с помощью вычитания восстановить цифру *K*, получим *K* = *7*.**

Ответ: 22 + 979 = 1001.

Пример 8 (на дом). **Расшифровать равенство** $\overline{PPQ} \cdot P = \overline{MRMM}$

Идея решения. **Случаи *P* = 1 и Р = 2 заведомо не годятся. Далее, рассмотреть последовательно случаи *P* = 3, 4, 5, … 9 и для каждого из них прикинуть, каким может быть *M* . Например, при *P* = 3 возможно только *M* = 1.**

ЗАДАЧИ НА СВОЙСТВА ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

Пример 9. Натуральное число $M = 4^n$. Если у него зачеркнуть первую цифру, то оно будет равно $L = 4^k$.Чему равно *M*?

Решение. Из условия следует, что: 1) у *M* число значащих цифр на 1 больше, чем у *L*; 2) последние цифры чисел совпадают. Рассмотрим степени 4: 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, … . Нетрудно видеть, что оба условия одновременно могут выполняться лишь для чисел, у которых номера в этом ряду различается на 2, значит *n* = *k*+2, отсюда *M* = 16 *L*.

Далее, в десятичной системе для числа *M* имеем разложение

$$M = 16L = 4^n = a_i \cdot 10^{s-1} + a_{i-1} \cdot 10^{i-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1 = a_i \cdot 10^{i-1} + L$$

откуда следует уравнение $15L = a_i \cdot 10^{i-1}$. Так как $L = 4^k$, то число 15*L* может заканчиваться только на один нуль, и поэтому *i* -1 =1, то есть *M* – двузначное. Из выписанного ряда подходит только *M*=64. **Ответ: 64.**

Пример 10 (на дом). Найти все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющаяся степенью двойки. **(Ответ: 32 и 64).**

ЗАДАЧИ НА СВОЙСТВА ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

Утверждение. Ни одно число, оканчивающееся на 2, 3, 7, 8, не может являться квадратом никакого натурального числа (табл. умножения)

Пример 11. Решить уравнение в натуральных числах $n! + 5n + 13 = k^2$

Решение. 1) Если $n \geq 5$, то число *n*! оканчивается нулем, и поэтому левая часть уравнения в этом случае оканчивается либо на 3, либо на 8. Но ни одно число, оканчивающееся на эти цифры, не может быть полным квадратом. Осталось рассмотреть случаи *n* = 1, 2, 3, 4.

2) Если *n* = 1, то слева 19, и *к* не является натуральным числом;

3) Если *n* = 2, то слева 25, и *к* = 5;

4) Если *n* = 3, то слева 34, и *к* не является натуральным числом;

5) Если *n* = 4, то слева 57, и *к* не является натуральным числом.

Ответ: *n* = 2, *к* = 5.

Пример 12 (на дом).

Решить уравнение в натуральных числах $3n! + 5n + 17 = k^2$

(**Ответ:** *n* = 1, *к* = 5).

КОММЕНТАРИЙ: ИНОГДА ПОХОЖИЕ ПО ВИДУ ЗАДАЧИ ТРЕБУЮТ ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СОВСЕМ ДРУГИХ МЕТОДОВ

Пример 13. **Решить уравнение в натуральных числах** $n! - k! = 4p!$

Решение. **Прежде всего, заметим, что *n > k*, *n > p*** $\Rightarrow n \geq k+1;\ \ n \geq p+1$

1) **Если n > 5, то** $n! - k! \geq n! - (n-1)! = (n-1)n! \geq 5n! > 4p! \Rightarrow$ **нет решений;**
2) **Если n = 5, то 5! - 4! = 4х4! , в этом случае n = 5, k = p = 4 – решения;**
3) **Если n = 4, то 4! - 3! = 18 , 4! - 2! = 22 , 4! - 1! = 23 – нет решений;**
4) **Если n = 3, то 3! - 2! = 4х1! , в этом случае n=5, k=2, p=1 – решения;**
5) **Если n = 2, то 2! - 1! = 1 – нет решений.**

Ответ: (n = 5, k = p = 4) и (n = 3, k = 2, p = 1).

Пример 14 (на дом). **Решить уравнение в натуральных числах**

$$n! - 3k! = 3p!$$

Ответ: (*n* = 6, *к* = *р* = 5); (*n* = 4, *к* = 3; *р* = 2); (*n* = 4, *к* = 2; *р* = 3); (*n* = 4, *к* = 3; *р* = 3); (*n* = 3, *к* = 1; *р* = 1);

Пример 15. Назовем автобусный билет «несчастливым», если сумма цифр его шестизначного номера делится без остатка на 13. Могут ли два подряд идущих билета оказаться «несчастливыми»?

Решение. Пусть первый «несчастливый» билет $n = \overline{ABCDEF}$

1) По условию задачи, число $S(n)= A+B+C+D+E+F$ делится на 13. Если последняя цифра F не равна 9, то $S(n+1)= A+B+C+D+E+F +1$, и это число на 13 не делится. Значит, $F = 9$.
2) Пусть $F = 9$. В этом случае $n = \overline{ABCDE9}$, $S(n)= A+B+C+D+E+9$ делится на 13. Если E не равна 9, то $S(n+1)= A+B+C+D+(E+1) = A+B+C+D+E+9-8$, и это число на 13 не делится. Значит, $E = 9$.
3) Пусть $E = F = 9$. В этом случае $n = \overline{ABCD99}$, $S(n)= A+B+C+D+18$ делится на 13. Если D не равно 9, то $S(n+1)= A+B+C+(D+1) = A+B+C+D+18-17$, и это число на 13 не делится. Значит, $D = 9$.
4) Пусть $D = E = F = 9$. В этом случае $n = \overline{ABC999}$, $S(n)= A+B+C+27$ делится на 13. Если C не равно 9, то $S(n+1)=A+B+C+1=A+B+C+27-26$, и это число на 13 делится. Значит, для того, чтобы два подряд идущих билета были «несчастливыми», необходимо и достаточно, чтобы D=E=F=9, и при этом A+B+C+27 делилось на 13, а цифра C не равнялась 9. **Ответ.** Могут. Например, 138999 и 139000.

Пример 16 (на дом). Найти два наименьших идущих подряд натуральных числа, у которых сумма цифр делится на 35.

Пример 17. Привести пример натурального числа, которое при переписывании его «задом наперед» увеличивается в 4 раза.

Решение. Условие задачи: $n=\overline{AB...CD},\quad m=\overline{DC...BA},\quad m=4n,\ m,n\in N$

1)Так как числа *m* и *n* имеют одинаковую разрядность, то цифра *A* может принимать только значения 1, и 2. Но если *A* =1,то число *m* будет нечетным, что противоречит условию задачи, значит, *A* =2.

2) $n=\overline{2B...CD},\quad m=\overline{DC...B2},\ m=4n$. При умножении на 4 цифра *D* (последняя цифра числа *n*) порождает последнюю цифру, равную 2. Значит, либо *D* = 3, что невозможно, либо *D* = 8.

3) $n=\overline{2B...C8},\quad m=\overline{8C...B2},\ m=4n$. Так как *D* = 8, то либо *B* = 1, либо *B* = 2. Но по признаку делимости на 4 число $\overline{B2}$ делится на 4, то *B* = 1.

4) $n=\overline{21..C8},\quad m=\overline{8C...12},\ m=4n$. Подбирая значения *C*, получим *C* = 7.

5) Мы получили значения крайних цифр $n=\overline{21..C8},\quad m=\overline{8C...12},\ m=4n$.

Далее, заметим, что **2178 х 4 = 8712** . Числа найдены.

Ответ: 2178 х 4 = 8712 .

Пример 18 (на дом). Последняя натурального цифра числа *n* равна 2. Если двойку перенести на первое место, то число удвоится. Найти *n*.

Пример 19 (на дом). Найти трехзначное число, равное кубу суммы его цифр.

Пример 20 (на дом). Шестая степень натурального числа *n* записана в некотором порядке цифрами 2,4,5,8,8,9,9 (и только ими). Найти *n*.

Пример 21. Число *n* написано не повторяющимися цифрами одной чётности, и при этом является полным квадратом . Чему равно *n*?